Team 44

„*Wie viele Mariachi-Bands werden gebraucht, um die Mauer von San Escobar zum Einsturz zu bringen?*“

PlaNeT SimTech

25.03.2017

Gliederung

1. Einleitung
2. Zusammenfassung
3. Hauptteil
   3.1. Vorgehensweise
   3.2. Ergebnisse
   3.3. Kritische Betrachtung
4. Schlussfolgerung
5. Literaturverzeichnis

1. Einleitung

Es wurde noch keine Mauer gebaut, die noch nicht gefallen ist!

Nachdem schon der Limes, die Chinesische Mauer und vor knapp 28 Jahren auch die Berliner Mauer fallen musste, steht nun auch San Escobar vor jener Aufgabe, eine Mauer zerbersten zu lassen. Eine Aufgabe biblischen Ausmaßes, betrachtet man das Schicksal der Stadtmauer von Jericho. So können wir schon in Josua 6,5 lesen: „Und wenn man das Horn bläst und ihr den Schall der Posaune hört, so soll das ganze Volk ein großes Kriegsgeschrei erheben. Dann wird die Stadtmauer einfallen, und das Volk soll hinaufsteigen, ein jeder, wo er gerade steht."

Damit wird das Schlusslied der Mauer von San Escobar von Mariachi-Bands gespielt werden – sehr vielen Mariachi-Bands. Dass es genau 398 108 Mariachi-Bands zum Fall der Mauer benötigt, werden wir im Folgenden aufzeigen.

2. Zusammenfassung

Die Berechnung des Ergebnisses basiert auf der Überlegung, dass die Mauer durch die von den Musikern erzeugten Schallwellen in immer stärker werdende Schwingung versetzt wird, ähnlich eines Weinglases, das von einem Sänger „zersungen" wird. Als weiteres Beispiel ist der Kollaps von Brücken zu nennen, die von im Gleichschritt marschierenden Soldaten zum Einsturz gebracht werden.

Die Berechnung des Problems lässt sich in drei Teile trennen:

Erstens muss ermittelt werden, welche Töne von den Musikern gespielt werden müssen, um einen Einsturz herbeizuführen. Zweitens muss die Lautstärke ermittelt werden, die mindestens erreicht werden muss, um die Mauer kollabieren zu lassen.

Drittens ist die Anzahl der für eine solche Lautstärke benötigten Musiker zu berechnen; sodass letztlich auf die Anzahl der Bands geschlossen werden kann.

3. Hauptteil

3.1 Vorgehensweise

Es wird zunächst angenommen, dass sich jede Mariachi-Band aus zehn Musikern zusammensetzt, wobei der Einfachheit halber keine Differenzierung zwischen verschiedenen Instrumenten vorgenommen wird. Diese Musiker stellen sich nun in einem Halbkreis um das zum Einsturz zu bringende Mauerstück, so dass der Abstand einer jeden Schallquelle zum Ziel identisch ist. Das ist wichtig, da es somit nicht durch Gangunterschiede zu einer destruktiven Interferenz kommen kann.

Eigenfrequenz der Mauer

Zur Berechnung der Eigenfrequenz der Betonmauer verwendeten wir die Formel für die (Kreis-)Eigenfrequenzen ω von rechteckigen und an allen Seiten momentenfrei gelagerten Platten der Dicke h:

$$\omega_{m,n} = \pi^2 \sqrt{\frac{B}{\rho h}} \left(\left(\frac{m}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_2}\right)^2 \right)$$

(Quelle: G.Müller, M.Möser, "Taschenbuch der Technischen Akustik")

B… Biegesteife

Die Biegesteife lässt sich nach Müller et al. folgendermaßen berechnen:

$$B = \frac{E\, h^3}{12(1-\mu^2)}$$

E… E-Modul

μ… Querkontraktionszahl

ρ… Dichte des Materials

m,n = 1; 2; 3; …

L_1, L_2 … Seitenabmessungen der Platte

Die Eigenfrequenz in Hz kann aus der Winkelfrequenz ω wie folgt berechnet werden:

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

Wir haben uns sowohl bei den Maßen der Mauer als auch bei der materiellen Zusammensetzung (Betonklasse B300) an der Berliner Mauer orientiert.

Wir haben aufgrund von Informationen des Ingenierbüros Süß[1] folgende Materialkennwerte verwendet:

Name der Größe	Formelzeichen	Wert	Einheit
Elastizitätsmodul	E	30	GPa
Querkontraktionszahl	μ	0,2	[einheitenlos]
Dichte	ρ	2500	Kg/m3
Höhe der Mauer	L_1	3,6	m
Breite eines Mauerstücks	L_2	1,2	m
Dicke der Mauer	h	0,1	m

Bei der Querkontraktionszahl sind wir von Beton ausgegangen und haben folgende Quelle verwendet:
http://www.chemie.de/lexikon/Poissonzahl.html#Zahlenwerte_f.C3.BCr_.CE.BC

Es gibt quadratisch unendlich viele Eigenfrequenzen, diese können über die Parameter m und n konfiguriert werden.

Zusammenstellung einiger Eigenfrequenzen:

m	N	Eigenfrequenz in Hz	Passender Ton
1	1	193,925472	
1	2	717,524248	
1	3	1590,18887	
2	1	252,103114	
3	1	349,06585	
4	1	484,813681	
5	1	659,346606	659,255Hz (e'') [2]
6	1	872,664626	

Die Eigenfrequenz für die Parameter m=5 und n=1 beträgt ca. 659,35Hz. Diese entspricht mit vernachlässigbarer Abweichung der Frequenz des Tones e“ in der Musik (659,255Hz).

Deshalb haben wir dafür entschieden, dass die Instrumente der Mariachi-Bands den Ton e“ spielen. So kann die Eigenfrequenz der Mauer äußerst genau gespielt

[1] http://www.ibs-cottbus.de/Betonklassenvergleich_IBS.pdf
[2] http://www.sengpielaudio.com/Rechner-notennamen.htm

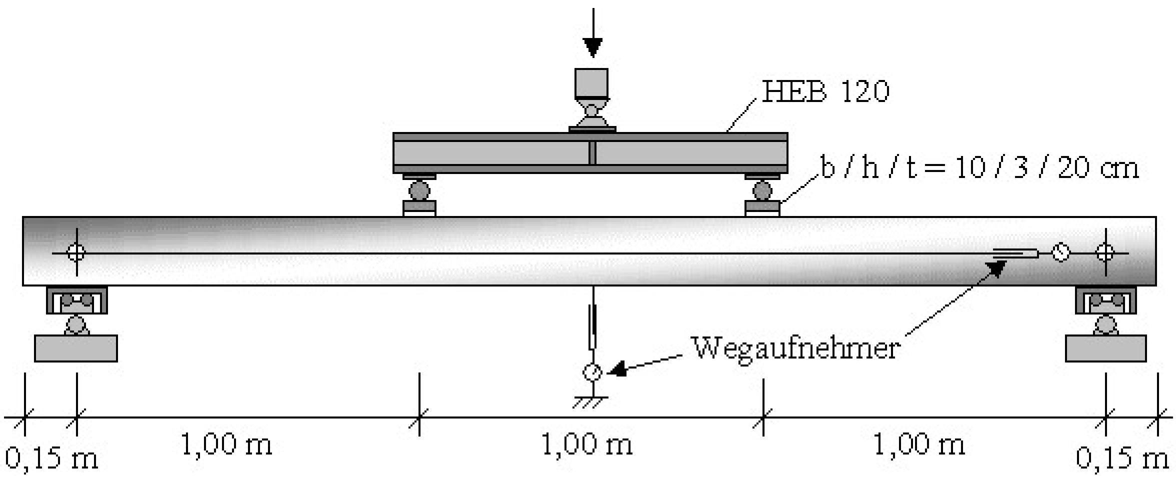
werden. Der Ton e“ liegt mitten im Tonvorrat und kann somit von fast jedem beliebigen Instrument gespielt werden.

Somit können wir davon ausgehen, dass die Frequenz der von den Instrumenten erzeugten Schallwellen der Eigenfrequenz der Mauer entspricht.

Für unser aufgestelltes physikalisches Modell benötigten wir die Amplitude der Eigenschwingung, bei der die Mauer kollabiert. Ein Wert für die kritische Amplitude war nicht leicht zu finden.

Daher gingen wir davon aus, dass sich eine Mauer an der Oberkante bis zu 20cm weit zur Seite biegen lässt, bis das Material nachgibt und die Mauer zusammenbricht. Wir haben uns bei dieser Schätzung auf Biegeversuche gestützt.

Der Messaufbau eines zu Rate gezogenen 4-Punkt-Biegeversuchs mit Beton:

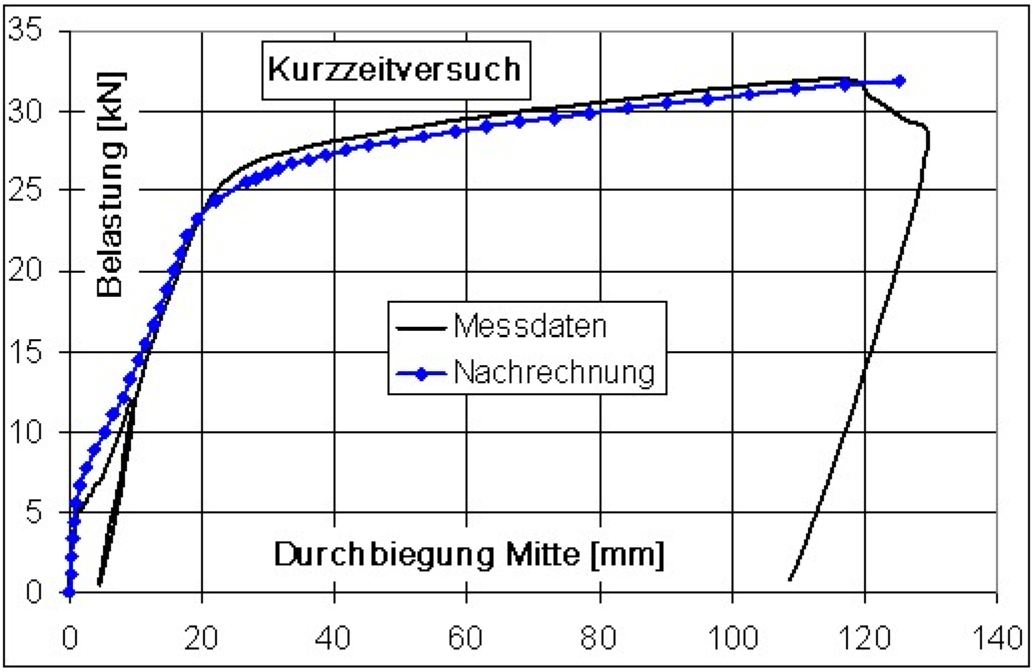


(Bildquelle: http://www.u-pfeiffer.de/aboutme/bild01.png)

Man muss dabei beachten, dass die Biegung bei dem Versuch nicht an der Oberkante erfolgt, sondern in der Mitte des Betonstücks. Außerdem beträgt die Länge des getesteten Betonstücks (entspricht der Höhe der Mauer) nur 3,3m während wir davon ausgehen, dass unsere Mauer 3,6m hoch ist.

Die Messergebnisse des zu Rate gezogenen 4-Punkt-Biegeversuchs mit Beton:

Beschreibung der Versuchsbedingungen: http://www.u-pfeiffer.de/aboutme/dissertation.html



(Bildquelle: http://www.u-pfeiffer.de/aboutme/bild02.png)

Somit bricht das getestete Betonstück bei einer Biegung von ca. 13cm.

Da, wie obig ausgeführt, die Mauer durch San Escobar höher ist und die größte Schwingung außerdem an der Oberkante und nicht in der Mitte auftritt haben wir uns für einen kritische Biegung von 20cm entschieden.

Somit beträgt die kritische Amplitude 0,2m.

Wir treffen die Annahme, dass in unserem physikalischen Modell die Mauer zusammenbricht, wenn die Eigenschwingung eine Amplitude von 0,2m erreicht.

Wird ein linear gedämpftes Bauwerk (die Mauer wird vereinfacht als solches angenommen) mit einer gegebenen Frequenz zum Schwingen angeregt, lässt sich die Vergrößerung der Amplitude im Zuge der Resonanz mithilfe der Vergrößerungsfunktion berechnen:

$$\alpha = \frac{s_2}{s_1} = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta)^2 + (2D\eta)^2}} \quad (\boldsymbol{I})$$

s_1: Amplitude der anregenden Kraft s_2: Amplitude der schwingenden Masse
D: Lehrsche Dämpfung
η: Verhältnis der Erregerfrequenz zur Eigenfrequenz des Materials

Indem angenommen wird, dass die Mauer aus Stahlbeton besteht, lässt sich D über das materialspezifische logarithmische Dekrement Λ ermitteln:[3]

$$D = \frac{\Lambda}{\sqrt{(2\pi)^2 + \Lambda}} \quad (\boldsymbol{II})$$

Λ setzt sich unter anderem aus der Baustoffdämpfung und der Baugrunddämpfung zusammen. Für erstere ergibt sich aus der Literatur ein Wert von $\Lambda_{BSD} = 0{,}1$[4]; der Wert der Baugrunddämpfung wird daher entsprechend auf $\Lambda_{BGD} = 0{,}1$ gesetzt. Somit ergibt sich für die Lehrsche Dämpfung: $D \approx 0{,}03$

Außerdem wird das Amplitudenverhältnis maximal, wenn die Erregerfrequenz gleich der Eigenfrequenz der Mauer ist. Somit muss gelten: $\eta \approx 1$

Einsetzen von η und D in **(I)** und Umformen nach s_2 liefert:

$$s_1 = 0{,}06 \cdot s_2 \quad (\boldsymbol{II}\ )$$

Dies bedeutet, dass die Amplitude der anregenden Schallschwingung im Resonanzkatastrophenfall 6 Prozent der Amplitude der schwingenden Mauer betragen muss.
Die entsprechende Amplitude, bei welcher die Mauer aufgrund einer zu hohen Biegespannung kollabiert, wird wie oben beschrieben auf 0,2m gesetzt.

Dies liefert die mindestens notwendige Amplitude s_2 des durch die Musiker zu erzeugenden Schalls.

Bevor die Mindestanzahl der Instrumente durch die benötigte Lautstärke ermittelt werden kann, muss zuerst noch von der Amplitude auf den Schalldruck p geschlossen werden. Dabei wird folgende Formel verwendet:[5]

$$p = s_1 \cdot Z \cdot 2\pi f \quad (\boldsymbol{IV})$$

Z: Schallkennimpedanz; bei 25°C gilt: $Z = 410\,\frac{Ns}{m^3}$

Da die Lautstärke der Instrumente jedoch nur über den Schalldruckpegel L_p bestimmt werden kann, wird der ermittelte Wert für p entsprechend in die logarithmierte Art umgeformt: Die bekannte Umrechnungsformel hierfür lautet:

$$L_p = 10 \log\left(\frac{p^2}{(2 \cdot 10^{-5} Pa)^2}\right) \quad (\boldsymbol{V})$$

Damit erhält man den benötigten Schalldruckpegel in dB, von welchem nun nur noch auf die Anzahl der Instrumente geschlossen werden muss. Da sich bei einer

[3] http://www.harrer-ing.net/de/downloads/veroeffentlichungen/Baudynamik_in_der_Alltagspraxis.pdf
[4] ebd.
[5] https://de.wikipedia.org/wiki/Schalldruck

Verdopplung der Schallquellen der Pegel um 3dB erhöht, gilt für diesen Fall nachfolgende Formel:[6]

$$L_{\Sigma} = 10\log(n)\,dB + L_i \quad (\boldsymbol{VI})$$

L_{Σ}: Schallpegel von n Instrumenten erzeugt; mit L_p gleichzusetzen
L_i: Schallpegel eines Instruments

Löst man diese Formel nach n auf, erhält man die Anzahl der benötigten Instrumente. Da davon ausgegangen werden kann, dass für jedes Instrument genau ein Musiker benötigt wird und eine Mariachi-Band aus durchschnittlich zehn Mitgliedern besteht, erhält man schließlich die endgültige Anzahl A_B der mindestens benötigten Bands aus:

$$A_B \geq \frac{n}{10} \quad (\boldsymbol{VII}) \qquad mit\ A \in \mathbb{N}$$

3.2 Ergebnisse

Da die maximal mögliche Amplitude der Mauerschwingung auf $s_2 = 0{,}2m$ festgelegt wurde, ergibt sich aus ***(III)***: $s_1 = 0{,}012m$

Einsetzen in ***(IV)*** liefert für den durch die Schallwellen erzeugten neuen Luftdruck: $p = 24483Pa$

Daraus ergibt sich unter Zuhilfenahme der Formel ***(V)*** für den Schalldruckpegel: $L_p = 181dB$

Daher muss die von allen Instrumenten zusammengenommen erzeugte Lautstärke mindestens 181 dB betragen. Im Folgenden wird sich nun zur effizienteren Modellierung darauf geeinigt, dass die maximale Lautstärke eines einzelnen Instruments wie auch bei der Trompete $L_i = 115dB$ beträgt. Somit ergibt sich aus ***(VI)***: $n \approx 3981072$

Setzt man die erhaltene Musikeranzahl nun in ***(VII)*** ein, bekommt man für die Anzahl der Bands: $A_B = 398108$

Es werden also mindestens 398108 Mariachi-Bands benötigt, um die Mauer durch bloßes Musizieren (in der richtigen Frequenz) zum Einsturz zu bringen.

3.3 Kritische Betrachtung

Es wurden folgende Sachverhalte vernachlässigt oder vereinfacht um eine Beantwortung im Rahmen der Veranstaltung zu ermöglichen:

[6] https://de.wikipedia.org/wiki/Schalldruckpegel

- Die Abnahme der Schallintensität mit Vergrößerung des Abstandes von der Mauer
- Der Schall der Musiker, die durch Halbkreisaufstellung fast parallel zur Mauer stehen, wird auf eine sehr große Fläche auf der Mauer gestreut und trägt so kaum zur Anregung der Mauerschwingung bei
- durch geringe Frequenzunterschiede hervorgerufene schwache Interferenzen der einzelnen Schallwellen sowie daraus entstehende Schwebungen
- Die unterschiedliche Klangcharakteristik der Instrumente
- Die Tatsache, dass eventuell mehr Spieler benötigt werden, da nicht alle Spieler den Ton ausreichend lang halten können
- Der Faktor Zeit, da von einem eingeschwungenen System ausgegangen wird; bis dieser Zustand erreicht wird, vergeht eine bestimmte Zeit t
- aufgrund von Materialermüdung wird der Zusammenbruch der Mauer tendenziell früher stattfinden

4. Schlussfolgerung

Somit wurde zur Beantwortung der Aufgabenstellung das Phänomen der Resonanzkatastrophe verwendet, um das Einstürzen der Mauer in San Escobar hervorzurufen. Die Berechnung fußt aufgrund fehlender Informationen auf einigen unsicheren Annahmen (wie beispielsweise die Beschaffenheit der Mauer); des Weiteren mussten aus Zeitgründen Vereinfachungen und Vernachlässigungen (vgl. Kapitel 3.3) vorgenommen. Dennoch wurde unter diesen Umständen der Wert von 398108 Bands ermittelt, wobei dieses Ergebnis die Unmöglichkeit der Umsetzung beweist.

5. Literaturverzeichnis

Bibelzitat: https://www.bibleserver.com/text/LUT/Josua6

Berliner Mauer: http://www.berliner-mauer.de/drei-generationen-der-berliner-mauer/mauerbau-dritte-generation/stuetzwandelemente-grenzmauer-75/stuetzwandelement-ul-1241.html

Allgemeines zu Wellen und Interferenz:

- https://de.wikipedia.org/wiki/Interferenz_(Physik)
- http://www.leifiphysik.de/akustik/akustische-wellen
- Horst Kuchling: Taschenbuch der Physik, 2004, Carl Hanser Verlag München